L'épidémiologie pour tous

Chi-deux

Rédigée par B. Toma, B. Dufour, J.J. Bénet et J. Rivière ; validée par le Bureau de l'AEEMA

Le chi-deux (χ^2) est un « test statistique ». Comme d'autres tests statistiques, il est utilisé notamment :

- En épidémiologie *descriptive*, lors de comparaison des résultats obtenus sur des échantillons en vue de savoir si l'écart observé peut résulter du hasard (fluctuations d'échantillonnage) ou correspond à une différence significative ;
- En épidémiologie *analytique*, lors d'études menées sur des échantillons en vue de vérifier l'hypothèse d'association entre des facteurs de risque supposés et un état pathologique.

On peut présenter ce test en prenant un exemple simple.

Exemple

Une enquête a fourni les résultats suivants : dans un premier département, sur un ***échantillon*** *tiré au sort de 200 exploitations, 40 se sont révélées atteintes par une maladie ; dans un autre département, sur un* ***échantillon*** *tiré au sort de 300 exploitations, 30 sont atteintes. Le premier département a-t-il une proportion d'exploitations atteintes par cette maladie réellement supérieure à celle de l'autre département, ou cette différence peut-elle être due au hasard ?*
Les résultats de l'enquête apparaissent sur le tableau 1.

En fait, comme l'enquête a porté sur des échantillons, la question qui se pose est de savoir si l'écart entre les pourcentages de prévalence de la maladie dans les deux échantillons (20 % = 40/200 pour le premier ; 10 % = 30/300 pour le second) est dû simplement aux inévitables fluctuations d'échantillonnage, ou au fait qu'il y ait une réelle différence entre les pourcentages de prévalence dans les deux départements.

Tableau 1 : Effectifs observés d'exploitations atteintes et d'exploitations indemnes dans les échantillons issus de deux départements

Exploitations	Atteintes	Indemnes	Total
Premier département	40	160	200
Second département	30	270	300
Total	70	430	500

Principe de calcul du χ^2

La première hypothèse (absence de différence réelle et rôle uniquement des fluctuations d'échantillonnage) est qualifiée « d'hypothèse nulle » (H_0) ; la seconde (réelle différence entre les deux départements) est appelée « l'hypothèse alternative » (H_1).

Le ***principe*** du χ^2 est de ***comparer*** la valeur numérique (obtenue à l'aide d'une formule mathématique) de ***l'écart constaté*** dans les résultats de l'étude, avec les valeurs numériques des ***écarts potentiels calculés*** de la même façon à partir des résultats ***théoriques*** obtenus en considérant que les différents échantillons prélevés sont issus d'une seule et même population. La probabilité de survenue aléatoire de ces écarts est d'autant plus rare que leur amplitude est forte. Pour étudier l'hypothèse H_0, il convient de calculer la valeur théorique de la fréquence du phénomène étudié (ici, la fréquence de la maladie) s'il n'y avait qu'une seule et même population ; ceci est réalisé en faisant la moyenne entre les résultats des deux échantillons.

Pour réaliser le χ^2, il faut donc :

- Calculer les effectifs théoriques d'exploitations atteintes dans les échantillons de chacun des deux échantillons, en l'absence de différence réelle de prévalence de la maladie entre ces deux départements (H_0). Sous l'hypothèse nulle, la proportion d'élevages atteints dans un échantillon de 500 exploitations serait de :

$$(40 + 30) / (200 + 300) = 14\ \%$$

L'effectif théorique d'élevages atteints dans l'échantillon du premier département serait de : 200 x 14 % = ***28***

Dans le second : 300 x 14 % = ***42***

Les effectifs d'exploitations indemnes s'obtiennent par soustraction dans chaque échantillon. Ces nombres (effectifs théoriques) sont placés entre parenthèses dans le tableau 2.

- ***Calculer un indice global*** (la valeur numérique du chi-deux) quantifiant l'importance de ***l'écart*** entre les ***nombres observés*** (résultant de l'enquête dans les deux départements) et les ***nombres théoriques*** correspondant à l'hypothèse nulle, c'est-à-dire l'absence de différence réelle de prévalence entre les deux départements. Cet indice global est obtenu en faisant la ***« somme des quotients des carrés des différences de chaque case, divisés par les effectifs théoriques »***.

Tableau 2 : Effectifs observés (en gras) dans les échantillons des deux départements et effectifs théoriques correspondants sous l'hypothèse nulle H_0 *(entre parenthèses)*

Exploitations	Atteintes	Indemnes	Total
Premier département	**40** (*28*)	**160** (*172*)	**200**
Second département	**30** (*42*)	**270** (*258*)	**300**
Total	**70**	**430**	**500**

Pour la première case (en haut, à gauche), ceci donne : (40 – 28)2 / 28 = 5,14

La somme des quotients semblables des quatre cases aboutit au nombre : ***9,97*** qui est la valeur du χ^2 (indice global) dans cette situation. Ce nombre quantifie l'importance de l'écart existant entre les résultats obtenus sur les deux échantillons de l'enquête et les valeurs qui correspondraient à une seule et même population pour les deux départements (H_0, absence de différence).

Interprétation statistique

Pour interpréter le résultat du calcul du χ^2, il faut :

- ***Disposer d'une table*** donnant les valeurs obtenues pour ce type d'indice global en raison des seules fluctuations d'échantillonnage, lors de tirages successifs dans une population unique. Ces valeurs apparaissent dans le tableau 3 (tableau simplifié ne faisant apparaitre que les valeurs pour un tableau de données à quatre cases, comme le tableau 1).

Tableau 3 : Table donnant la valeur de χ^2 telle que la probabilité p du risque d'erreur par excès (risque d'erreur alpha) égale ou dépasse une valeur donnée (pour un degré de liberté, c'est-à-dire un tableau à quatre cases)

Probabilité du risque d'erreur alpha	**0,90**	**0,50**	**0,30**	**0,20**	**0,10**	**0,05**	**0,01**	**0,001**
Valeur du χ^2	0,016	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	6,635	10,827

Le tableau 3 montre que, par exemple, il y a 50 % de probabilité pour qu'une valeur de χ^2 de 0,455 corresponde à un écart dû au seul hasard (fluctuations d'échantillonnage) ; une probabilité plus faible, de 20 %, pour que la valeur atteigne 1,642 et de 5 % pour 3,841. Bien sûr, la probabilité d'atteindre une valeur élevée du χ^2 calculé, par le seul effet du hasard, est d'autant plus faible que la valeur obtenue est élevée.

- ***Définir un niveau de risque d'erreur par excès acceptable,*** c'est-à-dire une probabilité de conclure à tort à l'existence d'une différence réelle entre les éléments comparés alors que l'écart n'est que le résultat des seules fluctuations d'échantillonnage. Souvent, cette probabilité acceptable est fixée à 0,05 (mais elle peut l'être à des niveaux supérieurs ou inférieurs).

- ***Enfin, comparer la valeur obtenue de l'indice global calculé*** (valeur du χ^2), avec la valeur présente dans le tableau 3 et correspondant à la probabilité de risque acceptable. Si le risque acceptable est de 0,05, la valeur de comparaison est de 3,841 (cf. le tableau 3). Si la valeur du chi-deux obtenue est inférieure à 3,841, il n'est pas possible de rejeter l'hypothèse nulle et, donc, de conclure à une différence entre les résultats de l'enquête.

  Si la valeur du χ^2 obtenue est supérieure à 3,841, ce qui est le cas pour les départements de l'exemple étudié (9,97 > 3,841), on peut rejeter l'hypothèse nulle et conclure à l'existence d'une ***différence significative au plan statistique*** entre les pourcentages de prévalence des deux départements. Le pourcentage de prévalence de la maladie étudiée est plus élevé dans le premier département que dans le second (la probabilité pour que le niveau de différence constaté entre les résultats dans les deux échantillons soit exclusivement dû à des fluctuations d'échantillonnage étant plus faible que 5 %, risque d'erreur accepté par l'enquêteur).

- ***On peut aussi utiliser une fonction informatique appropriée pour obtenir directement la probabilité pour que cet écart soit compatible avec un déterminisme aléatoire.***

Par exemple, avec XL : LOI.KHIDEUX.DROITE, en précisant comme argument la valeur calculée du chi-deux (ici 9,97) et le nombre de degrés de liberté (ici, 1).

Dans l'exemple, la valeur obtenue est 0,0016.

De façon générale, si la valeur de probabilité ainsi obtenue est inférieure au seuil de signification retenu, par exemple 0,05, l'écart est significatif au plan statistique. Si la valeur est supérieure, on ne peut pas dire que l'écart est significatif au plan statistique.

Dans l'exemple, l'écart est donc significatif.

Conditions de validité

Le principe du χ^2 ayant été présenté, il convient d'attirer l'attention sur l'existence de ***conditions d'application de ce test*** qu'il faut vérifier avant de procéder au calcul du χ^2 :

- Ce test ne peut être utilisé que ***si les effectifs théoriques de toutes les cases sont d'au moins cinq ;***
- ***Les unités dénombrées doivent être indépendantes*** sur le plan statistique**.**

Remarques

1) La valeur de l'indice global du chi-deux est directement fonction du nombre total d'unités utilisées dans les échantillons : plus les *échantillons sont de grande taille*, plus la probabilité de trouver une *différence significative* est élevée (cf. Fiche : *Différence significative au plan statistique*).

2) Lors de la comparaison de plusieurs résultats (et non pas de deux seulement comme dans l'exemple retenu), intervient la notion de *« degré de liberté »* qui est un reflet du nombre de cases du tableau, obtenu par calcul [(nombre de lignes – 1) * (nombre de colonnes -1)], et permettant d'utiliser les valeurs de probabilités adaptées.

Toma B. et al. : Epidémiologie appliquée, 2018, AEEMA éditeur, 614 p.

Terminologie : des liens hypertextes (en bleu souligné) vous permettent d'accéder aux définitions sur le site de l'AEEMA

Fiches AEEMA : Différence significative au plan statistique ;
Erreurs ;
« p » : degré de signification.